Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2006.

Sea $f : R \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

(a) [1'5 puntos] Determina $a, b \in R$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 2) y tiene un punto de inflexión de abscisa x = 0.

(b) [1 punto] Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Solución

(a)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

Pasa por (2,2), nos dice que f(2)= 2

Punto de inflexión en x = 0, nos dice que f ''(0) = 0

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

De f ''(0) = 0 tenemos 0 = 0 + 2a, de donde a = 0

De f(2) = 2, tenemos 2 = 8 + 2b +1, de donde b = -7/2

La función es $f(x) = x^3 -7/2x + 1$

(b)

El punto de inflexión tiene de abscisa x = 0 (nos lo dice el problema)

La ecuación de la recta tangente en x = 0 es y – f(0) = f '(0)(x – 0)

f(0) = 1

f '(0) = b = -7/2

Luego la recta tangente en x = 0 es y – 1 = (-7/2)(x – 0)

La ecuación de la recta normal en x = 0 es y – f(0) = (-1)/[f '(0)](x – 0)

f(0) = 1

f '(0) = b = -7/2

Luego la recta normal en x = 0 es y – 1 = (2/7)(x – 0)

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2006.

Sea $f : (0, 2) \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} Lnx & \text{si } 0 < x \le 1 \\ Ln(2-x) & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

(a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en el punto x = 1.

(b) [1'5 puntos] Calcula $\int_1^{1'5} f(x)dx$

Solución

(a)

$$f(x) = \begin{cases} Lnx & \text{si } 0 < x \le 1 \\ Ln(2-x) & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Antes de estudiar la derivabilidad en x = 1, estudiaremos la continuidad en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Ln(2-x) = Ln(1) = 0$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (Lnx) = Ln(1) = 0$$

Como $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, la función es continua en x = 1

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{2-x} & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

La función es derivable en x = 1 si $f'(1^+) = f'(1^-)$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{-1}{2-x}\right) = -1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Como f '$(1^+) \neq$ f'(1^-), la función no es derivable en x = 1

(b)

$$\int_1^{1'5} f(x)dx$$

Calculamos I = ∫ Ln(2 – x)dx, que es una integral por partes (∫ u·dv = u·v - ∫ v·du)

u = Ln(2 – x) → du = -dx/(2-x); dv = dx → v = ∫ dx = x.

I = x·ln(2-x) - ∫ x·-dx/(2-x) = x·ln(2-x) + ∫ x·dx/(2-x) = x·ln(2-x) + I_1

I_1 = ∫ x·dx/(2-x) que es racional

x	-x + 2
-x + 2	-1
2	

I_1 = ∫ -1·dx + ∫ 2·dx/(2-x) = -x + 2·Ln(2-x)·(-1) = -x - 2·Ln(2-x), por tanto:

I = x·ln(2-x) + I_1 = x·ln(2-x) + (-x - 2·Ln(2-x)) = x·ln(2-x) - x - 2·Ln(2-x)

La integral pedida es $\int_1^{1'5}$ f(x)dx = $\int_1^{1'5}$ Ln(2-x)dx = $[x\cdot\ln(2-x) - x - 2\cdot\text{Ln}(2-x)]_1^{1'5}$ =

= ((1'5)·Ln(0'5) - 1'5 - 2·Ln(0'5)) - ((1)·Ln(1) - 1 - 2·Ln(1)) = (- 1'5 – 0'5·Ln(1/2)) - (0 - 1 - 0) =

= - 1'5 - 0'5·(Ln(1) - Ln(2)) + 1 = -0'5 + 0'5·Ln(2)

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2006.

Considera las matrices A = $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}$

(a) [1'25 puntos] Halla, si existe, la matriz inversa de AB + C .

(b) [1'25 puntos] Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican: C$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ = 3$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Solución

(a)

A = $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}$

$$D = AB + C = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & -3\\4 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{pmatrix}$$

Existe la inversa de la matriz D si det(D) $\neq$ 0

$|D| = \begin{vmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{vmatrix} = -6 \neq 0$, luego existe D^{-1}

D^{-1} = (1/|D|)Adj(D^t)

$$D^t = \begin{pmatrix}-7 & 10\\-5 & 8\end{pmatrix};\quad Adj(D^t) = \begin{pmatrix}8 & 5\\-10 & -7\end{pmatrix};\quad D^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix}8 & 5\\-10 & -7\end{pmatrix}$$

(b)

$$C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x-2y\\6x+6y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro tenemos el sistema

-x – 2y = 3x

6x + 6y = 3y, y al resolverlo obtenemos x = 0 e y = 0, por tanto la igualdad solo es cierto para x = y = 0.

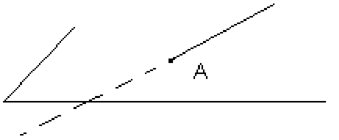
Ejercicio 4 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Sea la recta r de ecuación (x − 1)/1 = (y + 2)/3 = (z − 3)/(-1) y el plano π de ecuación x − y + z + 1 = 0. Calcula el área del triángulo de vértices ABC , siendo A el punto de corte de la recta r y el plano π, B el punto (2, 1, 2) de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B Sobre el plano π.

Solución

De la recta $r \equiv (x-1)/1 = (y+2)/3 = (z-3)/(-1) = m \in \Re$, tenemos el punto M(1,-2,3) y el vector director **u** = (1,3,-1)

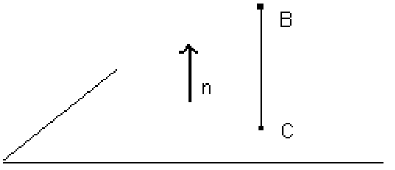
Del plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$ tenemos el vector normal **n** = (1,-1,1)



A es el punto de corte la recta r con el plano π. Ponemos la recta en vectorial y la sustituimos en el plano

$r \equiv (x,y,z) = (1+m, -2+3m, 3-m)$

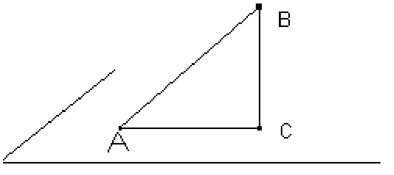
$(1+m) - (-2+3m) + (3-m) + 1 = 0$, de donde m = 7/3 y el punto A es A(1+7/3, -2+3(7/3), 3-7/3) = A(10/3, 5, 2/3)



Para hallar la proyección ortogonal de B(2, 1, 2) sobre el plano π, calculamos la recta s que pasa por B y es perpendicular al plano π por tanto su vector director **v** es el normal del plano **n**, **v** = **n** = (1,-1,1). La recta en vectorial es $s \equiv (x,y,z) = (2+n, 1 - n, 2+n)$

$(2+n) - (1-n) + (2+n) + 1 = 0$, de donde n = -4/3 y el punto C es C(2-4/3, 1+4/3, 2-4/3) = C(2/3, 7/3, 2/3)

Los puntos del triángulo son A(10/3, 5, 2/3), B(2, 1, 2) y C(2/3, 7/3, 2/3). Si nos hemos fijado en su construcción es un triángulo rectángulo, por tanto Suárez es 1/2 de cateto por cateto



Área = (1/2)||**CA**|| ||**CB**||

CA = (10/3 – 2/3, 5 – 7/3, 2/3 – 2/3) = (8/3, 8/3, 0)

CB = (2 – 2/3, 1 – 7/3, 2 – 2/3) = (4/3, -4/3, 4/3)

||**CA**|| = $\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$; ||**CB**|| = $\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Área = (1/2)||**CA**|| ||**CB**|| = $\frac{1}{2}.\frac{8}{3}\sqrt{2}.\frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{16}{9}\sqrt{6}$ u^2

Otra forma de hacerlo

Área = (1/2)||**CAxCB**||; **CAxCB** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8/3 & 8/3 & 0 \\ 4/3 & 4/3 & 4/3 \end{vmatrix}$ = **i**(32/9) – **j**(32/9) + **k**(-64/9= (32/9, -32/9,-64/9)

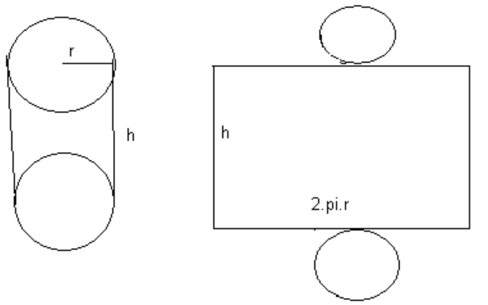
Área = (1/2)|| **CAxCB** || = $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2+\left(\frac{32}{9}\right)^2+\left(\frac{64}{9}\right)^2} = \frac{16}{9}\sqrt{6}\ u^2$

Opcion B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm^2. Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.

Solución



Volumen = V = área base por altura = $\pi r^2 h$
Relación = 200 = $2\pi rh + 2\pi r^2$, de donde $h = (100/\pi r) - r$
$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2[(100/\pi r) - r] = 100r - \pi r^3$.

Le aplicamos la técnica de máximos y mínimos
Si f '(a)= y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo
Si f '(a)= y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo

$V(r) = 100r - \pi r^3$.
$V'(r) = 100 - 3\pi r^2$.

$V'(r) = 0$, nos resulta $100 - 3\pi r^2 = 0$, de donde $r = \pm\sqrt{\dfrac{100}{3\pi}} = \pm\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$. Solo vale la solución positiva porque son longitudes.

$V''(r) = -6\pi r$, de donde $V''\left(\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}\right) = -6\pi.\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}} < 0$, por tanto es un máximo.

Veamos las dimensiones de la lata $r = \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ y $h = \dfrac{100}{\pi.\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}} - \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}} = \dfrac{20}{\sqrt{3\pi}}$

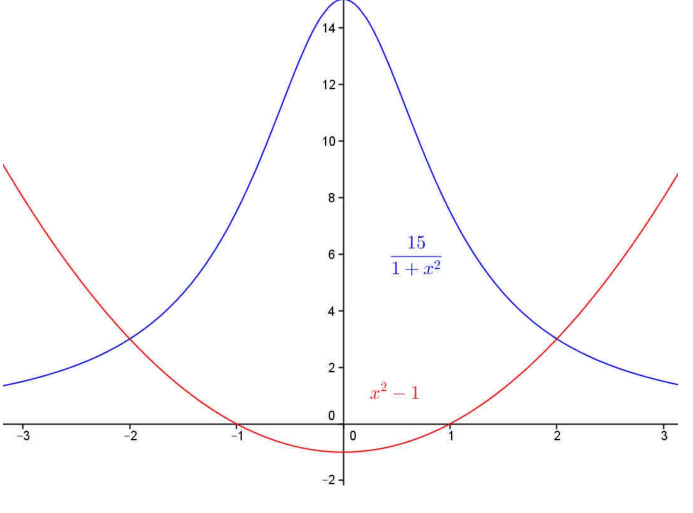
Vemos que la altura es el doble del radio, es decir la altura coincide con el diámetro.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2006.

(a) [0'75 puntos] Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y = 15/(1 + x^2)$ e $y = x^2 - 1$.
(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

(a)
La función $y = 15/(1 + x^2)$ siempre es positiva (está por encima del eje de abscisas OX), tiene la recta y = 0 como asíntota vertical en $\pm\infty$, porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, y además f(0) = 15
La parábola $x^2 - 1$ es exactamente igual que x^2 pero desplazada una unidad hacia abajo en ordenadas OY.
Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es



(b)
Para calcular el área del recinto que delimitan veamos en que puntos se cortan igualando las funciones.
$15/(1 + x^2) = x^2 - 1$, de donde $x^4 = 16$ y sus soluciones son $x = \pm 2$

El área es $\int_{-2}^{2}\left(\frac{15}{1+x^2} - x^2 + 1\right)dx = \left[15.artg(x) - \frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{2} =$

$= (15artg(2) - 8/3 + 2) - (15artg(-2) + 8/3 - 2) = 30artg(2) - 4/3\ u^2$. ($artg(-2) = -artg(2)$)

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2006.

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y - z &= -4 \\ 3X + \lambda y + z &= \lambda - 1 \\ 2x + \lambda y &= -2 \end{aligned}$$

(a) [1'25 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
(b) [1'25 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x + y - z &= -4 \\ 3X + \lambda y + z &= \lambda - 1 \\ 2x + \lambda y &= -2 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & \lambda & 1 & \lambda-1 \\ 2 & \lambda & 0 & -2 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \end{vmatrix}_{2^a F + 1^a F} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = (-1)(4\lambda - 2\lambda - 2) = -2\lambda + 2$

$|A| = 0$, nos dice que $-2\lambda + 2 = 0$ de donde $\lambda = 1$.

Si $\lambda \neq 1$, rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.
(b)
Si $\lambda = 1$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{1^a F + 3^a F(-2)} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Elijo 2ª y 3ª

$3x + y + z = 0$
$2x + y \quad = -2$. Tomando $z = a \in \Re$ obtenemos $x = 2 - a$ e $y = -6 + 2a$, luego la solución del sistema para $\lambda = 1$ es $(x, y, z) = (2 - a, -6 + 2a, a)$ con $a \in R$

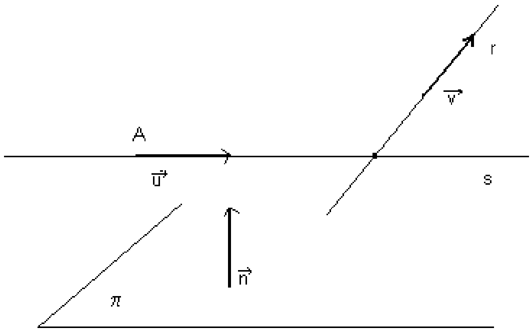
Ejercicio 4 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta r de ecuación x=y=z, es paralela al plano π de ecuación $3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto A(1, 2, −1).

Solución

Para determinar la recta "s" pedida necesito un punto A (lo tenemos) y un vector director **u** = (x,y,z). Vamos a determinarlo

Recta "s". Corta a la recta "r". Paralela al plano "π". Pasa por A(1, 2, -1)



De la recta r ≡ x = y = z tenemos el punto B(0, 0, 0) y el vector director **v** = (1, 1, 1)
Del plano π ≡ 3x + 2y − z = 4 tenemos el vector normal **n** = (3, 2, -1)

Como la recta "s" es paralela al plano π el vector director de la recta **u** es perpendicular al normal del plano **n**, es decir su producto escalar es cero.
u•n = 3x + 2y − z = 0

Como la recta "s" corta a la recta "r" el determinante det(**AB**, **u**, **v**) = 0, siendo A un punto de "s", B un punto de "r", y **u** y **v** los vectores directores de s y r.
AB = (-1, -2, 1)

det(**AB**, **u**, **v**) = 0 = $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ -x(-3) + y(-2) – z(1) = 3x – 2y – z = 0

Resolvemos el sistema
3x + 2y − z = 0
3x − 2y − z = 0, si restamos obtenemos 4y = 0, de donde y = 0. Tomando x = a ∈ ℜ tenemos z = 3x = 3a, por tanto la solución es (x, y, z) = (a, 0, 3a) con a ∈ ℜ. Estas son las coordenadas genéricas de todos los vectores directores de la recta "s" buscada. Si hacemos a = 1 tenemos el vector **u** = (1, 0, 3) y la recta pedida en paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$